3.4.3 Annexe

Familles sommables

3.4.14 DÉFINITION

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E et $S \in E$.
On dit que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est **sommable** et de somme S et on écrit $S = \sum\limits_{i\in I} a_i$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $J_\varepsilon \subset I$ telle que :
pour toute partie finie $L \subset I$, telle que $J_\varepsilon \subset L$ on ait $\|\sum\limits_{i\in L} a_i - S\| < \varepsilon$.

3.4.15 REMARQUE

On vérifie facilement de la définition de famille sommable que :

1. La somme d'une famille sommable est unique.
2. Si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont des familles sommables de somme respectivement S et S', alors pour tout λ , $\mu \in \mathbb{K}$, la famille $(\lambda x_i + \mu y_i)_{i\in I}$ est sommable et de somme $\lambda S + \mu S'$.

Dans une famille sommable, l'ensemble des éléments non nuls est au plus dénombrable :

3.4.16 PROPOSITION

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable de E. Alors

i) pour tout $\varepsilon > 0$, $\{i \in I; \|x_i\| \geq \varepsilon\}$ est fini

ii) l'ensemble $\{i \in I;\ x_i \neq 0\}$ est (au plus) dénombrable.

Démonstration: Soit $\varepsilon > 0$ et J_ε le sous-ensemble fini de I, donné par la définition de famille sommable. Soit $i_0 \in I - J_\varepsilon$ et on pose $L = J_\varepsilon \cup \{i_0\}$, alors $\|x_{i_0}\| = \|\sum\limits_{i\in L} x_i - \sum\limits_{i\in J_\varepsilon} x_i\| < 2\varepsilon$. Par conséquent, $\{i \in I; \|x_i\| \geq 2\varepsilon\} \subset J_\varepsilon$ est donc fini.
En particulier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\{i \in I; \|x_i\| \geq \frac{1}{n}\}$ est fini, et donc $\{i \in I;\ x_i \neq 0\} = \bigcup_{n\geq 1}\{i \in I; \|x_i\| \geq \frac{1}{n}\}$ est une réunion dénombrable d'ensembles finis il est alors au plus dénombrable. ∎

3.4.18 DÉFINITION (CRITÈRE DE CAUCHY)

On dit que la famille $(a_i)_{i\in I}$ vérifie le critère de Cauchy, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $J_\varepsilon \subset I$ telle que pour toute partie finie $L \subset I$ telle que $J_\varepsilon \cap L = \emptyset$ on ait $\|\sum\limits_{i\in L} a_i\| < \varepsilon$.

3.4.19 REMARQUE

Toute famille sommable vérifie le critère de Cauchy.
En effet, il existe $S \in E$, tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $J_\varepsilon \subset I$ telle que pour toute partie finie K, $J_\varepsilon \subset K \subset I \Rightarrow \|\sum_{i\in K} a_i - S\| < \varepsilon$. Soit $L \subset I$ finie, telle que $J_\varepsilon \cap L = \emptyset$, alors $J_\varepsilon \subset J_\varepsilon \cup L$, donc $\|\sum_{i\in J_\varepsilon\cup L} a_i - S\| < \varepsilon$.
D'où $\|\sum_{i\in L} a_i\| = \|\sum_{i\in J_\varepsilon\cup L} a_i - \sum_{i\in J_\varepsilon} a_i\| \leq \|\sum_{i\in J_\varepsilon\cup L} a_i - S\| + \|S - \sum_{i\in J_\varepsilon} a_i\| \leq 2\varepsilon$.

Réciproquement :

3.4.20 THÉORÈME

Soit $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach. Alors toute famille qui vérifie le critère de Cauchy est sommable.

Démonstration: Comme $(a_i)_{i\in I}$ vérifie le critère de Cauchy, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe J_n sous-ensemble fini de I tel que pour tout J fini, $J \cap J_n = \emptyset \Rightarrow \|\sum_{i\in J} a_i\| < \dfrac{1}{n}$.
Posons $S_n = \sum_{i\in L_n} a_i$, où $L_n = \bigcup_{1\leq k\leq n} J_k$. Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy.
En effet, pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\|S_{n+p} - S_n\| < \dfrac{1}{n}$, puisque $\left(L_{n+p} - L_n\right) \cap J_n = \emptyset$, et par la complétude de E, elle converge ; notons S sa limite. On va vérifier que $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et de somme S. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_\varepsilon$, $\|S_n - S\| \leq \varepsilon$. Soit $n_\varepsilon > N_\varepsilon$ tel que $\dfrac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Alors pour tout J fini, $L_{n_\varepsilon} \subset J$ on a $\|\sum_{i\in J} a_i - S\| \leq \|S_{n_\varepsilon} - S\| + \|\sum_{i\in J-L_{n_\varepsilon}} a_i\| \leq 2\varepsilon$. ∎

3.4.22 DÉFINITION

On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ est normalement (absolument) sommable si la famille $(\|x_i\|)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$.

3.4.23 COROLLAIRE

Soit $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach. Alors toute famille normalement sommable est sommable.

Démonstration: En effet, on a pour tout sous-ensemble fini $J \subset I$, $\| \sum_{i \in J} a_i \| \leq \sum_{i \in J} \|a_i\|$.
La famille $(\|a_i\|)_{i \in I}$ étant sommable, elle vérifie le critère de Cauchy, il en est de même pour $(a_i)_{i \in I}$ et par complétude de E, elle est alors sommable. ■

3.4.25 REMARQUE
La réciproque est en général fausse ; par exemple dans $\ell^2(\mathbb{N})$ la suite $\left(\frac{e_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable mais n'est pas normalement sommable.

3.4.26 Exercice Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille sommable de E, de somme S.
Montrer que $(f(x_i))_{i \in I}$ est une famille sommable et que $f(S) = \sum_{i \in I} f(x_i)$.

Dans un espace de Hilbert on a un critère simple pour vérifier la sommabilité d'une famille orthogonale :

3.4.27 THÉORÈME
Soit H un espace de Hilbert et $(a_i)_{i \in I}$ un système orthogonal.
Alors, la famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si la famille $(\|a_i\|^2)_{i \in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas $\| \sum_{i \in I} a_i \|^2 = \sum_{i \in I} \|a_i\|^2$.

Démonstration: Comme le système est orthogonal, pour tout sous-ensemble fini $J \subset I$ on a $\| \sum_{i \in J} a_i \|^2 = \sum_{i \in J} \|a_i\|^2$. Ainsi $(a_i)_{i \in I}$ vérifie le critère de Cauchy si et seulement si $(\|a_i\|^2)_{i \in I}$ vérifie le critère de Cauchy, et par la complétude de H et $\mathbb{R}$, on aura $(a_i)_{i \in I}$ sommable si et seulement si la famille $(\|a_i\|^2)_{i \in I}$ sommable. ■

3.4.29 COROLLAIRE
Soit H un espace de Hilbert et $(e_i)_{i \in I}$ un système orthonormé. Soit $(\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$.
Alors, la famille $(\alpha_i e_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si la famille $(\alpha_i)_{i \in I} \in \ell^2(I, \mathbb{K})$.

Un peu de théorie des ensembles infinis

3.4.30 DÉFINITION

— Un ensemble E est dit équipotent à un ensemble F lorsqu'il existe au moins une bijection de E sur F.
— On appelle cardinal de E la classe d'équivalence formée des ensembles équipotent à E. On note par $|E|$ le cardinal de E.
— Un ensemble est dit infini lorsqu'il n'est pas équipotent à un ensemble fini.

Lorsqu'il existe une application injective E dans F, on notera $|E| \leq |F|$.

3.4.31 REMARQUE

S'il existe une application injective (respectivement surjective) $E \to E$ sans être bijective alors E est infini. En particulier, tout ensemble contenant un sous-ensemble infini est infini.

3.4.32 PROPOSITION

Un ensemble E est infini si et seulement si $|\mathbb{N}| \leq |E|$.

Démonstration: Comme $\mathbb{N}$ est infini, il résulte de la remarque ci-dessus que E est infini. Réciproquement, supposons E infini. Soit $x_0 \in E$ fixé. Soit $E_0 = E \backslash \{x_0\}$. On a $E_0 \neq \emptyset$ puisque E n'est pas un singleton. Supposons que l'on ait construit $n+1$ éléments distincts $x_0, x_1, \ldots, x_n$ dans E. Comme E est infini, l'ensemble $E_n = E \backslash \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ est non vide. On choisit, un élément x_{n+1} dans E_n, de sorte qu'il est distinct de chacun des éléments $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Par récurrence, on construit ainsi une application $f : \mathbb{N} \to E$ définie par $f(n) = x_n$, qui est injective. ∎

3.4.34 THÉORÈME (CANTOR-BERNSTEIN)

Soient deux ensembles E et F.

1) On a toujours $|E| \leq |F|$ ou bien $|F| \leq |F|$, en d'autres termes deux cardinaux sont toujours comparables.
2) Si $|E| \leq |F|$ et $|F| \leq |E|$ alors $|E| = |F|$.

Démonstration: 1) Soit $\Omega = \{(f, X) : X \in \mathscr{P}(E)$ et $f : X \to F$ injective $\}$ ordonné par : $(f, X) \leq (g, Y)$ si et seulement si $X \subset Y$ et $g_{|X} = f$.
Alors $(\Omega, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné. Vérifions que $(\Omega, \leq)$ satisfait aux hypothèses du Lemme de Zorn.
La première hypothèse est que $\Omega \neq \emptyset$. Ceci est vrai, car l'unique fonction de $\emptyset$ vers F est un élément de Ω.
Pour vérifier la deuxième hypothèse, i.e. $(\Omega, \leq)$ est inductif, on considère un

sous-ensemble $C = \{(f_i, X_i)\}_{i\in I} \subseteq \Omega$ totalement ordonné. Posons $U = \bigcup\limits_{i\in I} C_i$ et $h : U \to F$ définie par $h_{|_{C_i}} = f_i$. On vérifie facilement que $h : U \to F$ est bien définie. Montrons que h est injective. Soient $x, x' \in U$ telles que $h(x) = h(x')$. Comme C est totalement ordonné, il existe $i \in I$ tel que $\{x, x'\} \subset C_i$. On a alors $h_{|_{C_i}} = f_i$, d'où $f_i(x) = f_i(x')$, par injectivité de f_i, $x = x'$. Donc h est injective et il s'ensuit que $(h, U) \in \Omega$. On a donc prouvé l'existence d'un majorant pour C. D'après le Lemme de Zorn, il existe un élément maximal $(f, X) \in \Omega$. Si $X = E$, on a terminer, puisqu'on a prouvé que $|E| \leq |F|$.
Si $X \neq E$, alors $f : X \to F$ est surjective. En effet, si f n'est pas surjective, on peut choisir $a \in E\backslash X$ et $b \in B\backslash f(X)$, et définir une fonction $g : X \cup \{a\} \to F$ par
$$g(x) = \begin{cases} b & \text{si } x = a \\ f(x) & \text{si } x \in X. \end{cases}$$
Alors g est injective, et comme $(f, X) < (g, X \cup \{a\})$ ceci contredit la maximalité de (f, X). Ainsi, $f : X \to F$ doit être surjective, donc bijective, ce qui prouve que $|F| \leq |E|$.

2) Soit $f : E \to F$ et $g : F \to E$ des applications injectives. Pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, l'application $f_{|_A} : A \to f(A)$ est une bijection. L'idée est de trouver un $A \in \mathscr{P}(E)$ telle que l'on ait la propriété suivante : l'application $g_{|_{F\backslash f(A)}} : F\backslash f(A) \to E\backslash A$ soit bijective, comme g est injective, il suffit que $g(F\backslash f(A)) = E\backslash A$ ce qui équivaut à $E\backslash g(F\backslash f(A)) = A$.
Ceci permet alors de définir une bijection h de E sur F en posant :
$$h(x) = \begin{cases} f_{|_A}(x) & \text{si } x \in A \\ g^{-1}_{|_{(F\backslash f(A))}}(x) & \text{si } x \in E\backslash A, \end{cases}$$
On doit donc trouver $A \in \mathscr{P}(E)$ tel que $E\backslash g(F\backslash f(A)) = A$.
Pour cela on définit l'application $\phi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ définie par $\phi(X) = E\backslash g(F\backslash f(X))$. On vérifie facilement que l'application ϕ est croissante i.e. $X \subset Y$ alors $\phi(X) \subset \phi(Y)$. On cherche alors un point fixe de ϕ.

Posons $\mathscr{E} = \{X \in \mathscr{P}(E); X \subseteq \phi(X)\}$. Puisque $\emptyset \in \mathscr{E}$, $\mathscr{E} \neq \emptyset$. On va vérifier que $A := \bigcup\limits_{X\in\mathscr{E}} X$ convient.
Comme pour tout $X \in \mathscr{E}$, $X \subseteq A$ alors $\phi(X) \subseteq \phi(A)$; d'où $X \subseteq \phi(A)$, parsuite $A \subseteq \phi(A)$. Maintenant, $A \subseteq \phi(A)$ implique $\phi(A) \subseteq \phi(\phi(A))$ puisque ϕ est croissante, et donc $\phi(A) \in \mathscr{E}$. Mais par définition de A, $\phi(A) \in \mathscr{E}$ entrîne que $\phi(A) \subseteq A$. Donc $A = \phi(A)$. ■

Pour terminer on a :

3.4.36 THÉORÈME
Soit E un ensemble infini. Alors $|E^2| = |E|$.

Démonstration: Soit l'ensemble $\Omega = \{(f, X) : X \in \mathscr{P}(E) \text{ et } f : X^2 \to X \text{ injective }\}$ muni de l'ordre $(f, X) \leq (g, Y)$ si et seulement si $X \subset Y$ et $g_{|_{X^2}} = f$.
On peut vérifier comme dans le 1) de 3.4.34 que $(\Omega, \leq)$ satisfait les hypothèses du Lemme de Zorn et donc il admet un élément maximal $(f, X) \in \Omega$. Alors $f : X^2 \to X$ est une injection et $X \subseteq E$. Remarquons que $X^2 \sim X$ en vertu de 3.4.34, puisque on aura $|X^2| \leq |X|$, et que $|X| \leq |X^2|$ est évident.
Montrons que $|E \backslash X| \leq |X|$.
Sinon, d'après le 1) du théorème 3.4.34, $|X| \leq |E \backslash X|$. Par conséquent, il existe un sous-ensemble $Y \subseteq E \backslash X$ tel que $|X| = |Y|$. On a alors $|Y^2| = |X^2| = |X| = |Y|$. Puisque $X \cap Y = \emptyset$, les quatre ensembles

$$X \times X,\ X \times Y,\ Y \times X,\ Y \times Y$$

sont deux à deux disjoints et, clairement, la réunion de ces ensembles est $(X \cup Y)^2$. Si on définit $A = (X \times Y) \cup (Y \times X) \cup (Y \times Y)$ alors $(X \cup Y)^2 = X^2 \cup A$ et $X^2 \cap A = \emptyset$. De plus, on a $|X \times Y| = |Y|$ et $|Y \times X| = |Y|$ et $|Y \times Y| = |Y|$, d'où $|A| = |Y|$. On prend une bijection $g : A \to Y$. En utilisant les injections $f : X^2 \to X$ et $g : A \to Y$ on définit une fonction $h : (X \cup Y)^2 \to X \cup Y$ par $h(z) = \begin{cases} f(z), & \text{si } z \in X^2 \\ g(z), & \text{si } z \in A. \end{cases}$
Il est clair que h est injective, donc $(h, (X \cup Y)^2) \in \Omega$ et $(f, X) < (h, (X \cup Y)^2)$, ce qui contredit la maximalité de (f, X). Cette contradiction montre que $|E \backslash X| \leq |X|$. Puisque $(E \backslash X) \cup X = E$ est infini et $|E \backslash X| \leq |X|$, alors $|(E \backslash X) \cup X| = |X|$, donc $|E| = |X|$. Ainsi $|E^2| = |X^2| = |X| = |E|$. ■

3.4.38 Corollaire

Soit E un ensemble infini. Alors

i) pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|E^k| = |E|$.

ii) $|\mathbb{N} \times E| = |E|$.